# Synthèse Suites Numériques

P. Gosse

*« What's one and one and one and one and one and one and one and one and one and one ? »*
*« I don't know » said Alice. « I lost count. »*
*« She can't do Addition. »*
*Lewis Caroll*

## Table des matières



## 1 Généralités

Dans ce chapitre et sauf mention du contraire, le terme *suite numérique* désigne une suite de réels ou de complexes c'est à dire toute application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

**Définition 1.0.1.** (**Suites extraites**)
Soit $(u_n)$ une suite numérique. On appelle suite extraite de la suite $(u_n)$ toute suite numérique $(v_n)$ pour laquelle il existe une application $\varphi$ strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N} : v_n = u_{\varphi(n)}$.

On notera $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$

**Définition 1.0.2.** (**Voisinage**) Soit $l \in \mathbb{R}$. On appelle voisinage de $l$ dans $\mathbb{R}$ toute partie de $\mathbb{R}$ contenant :

- Si $l \in \mathbb{R}$ un intervalle de la forme $]l-\varepsilon, l+\varepsilon[$ avec $\varepsilon > 0$.
- Si $l = +\infty$, un intervalle de la forme $]A, +\infty[$ avec $A \in \mathbb{R}$.
- Si $l = -\infty$, un intervalle de la forme $]-\infty, A[$ avec $A \in \mathbb{R}$.

*Remarque* 1.1. Un voisinage de $l$ est une partie de $\mathbb{R}$ contenant **tous** les réels « à proximité » de $l$.

**Définition 1.0.3.** (**Limite d'une suite**) Soit

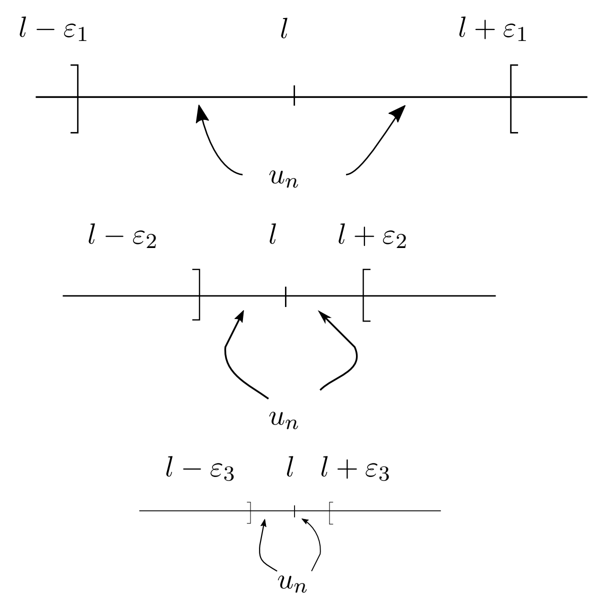


FIGURE 1 – convergence vers $l \in \mathbb{R}$

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et $l \in \overline{\mathbb{R}}$.
On dit que $(u_n)$ admet $l$ pour limite quand $n$ tend vers l'infini, (et on note $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$) si tout voisinage de $l$ dans $\mathbb{R}$ contient **TOUS** les termes $u_n$ à partir d'un certain rang.
C'est à dire : pour tout voisinage $V$ de $l$ dans $\mathbb{R}$, il existe un entier naturel $N$ tel que pour tout entier $n > N$, $u_n \in V$. Suivant les cas :

**Si** $l \in \mathbb{R}$: $(\forall\varepsilon > 0)$ $(\exists N \in \mathbb{N}) : \forall \in \mathbb{N}$ $n \geq N \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon$.

**Si** $l = +\infty$ : $(\forall A > 0)\ (\exists N \in \mathbb{N}) : \forall \in \mathbb{N}\ n \geq N \Rightarrow u_n \geq A$.

**Si** $l = -\infty$ : $(\forall A < 0)\ (\exists N \in \mathbb{N}) : \forall \in \mathbb{N}\ n \geq N \Rightarrow u_n \leq A$.

*Conséquence* 1.0.1.
1. si la suite $(u_n)$ possède une limite celle-ci est unique.
2. Toute suite convergente dans $\mathbb{R}$ est bornée (réciproque fausse : considérer $u_n = (-1)^n$).

## 2 Théorèmes de convergence

**Proposition 2.0.1.** ***(Limite et suites extraites)***
*Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et $l \in \overline{\mathbb{R}}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$.
2. $\lim_{n\to+\infty} u_{2n} = \lim_{n\to+\infty} u_{2n+1} = l$.
3. *Toute suite extraite de $(u_n)$ admet $l$ pour limite.*

*Remarque* 2.1. Cette proposition est utilisée pour démontrer qu'une suite n'admet pas de limite. En effet il suffit de trouver deux suites extraites de la suite qui ne convergent pas vers la même limite (ou une sous-suite qui n'admet pas de limite).

**Proposition 2.0.2.** ***(Composition à gauche par une fonction)***
*Soient $l, L \in \overline{\mathbb{R}}$ et $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant $l$ ou d'extrémité $l$, $f : I \to \mathbb{R}$ une application et $(u_n)$ une suite réelle.*
*Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$ et si $\lim_{x\to l} f(x) = L$ alors $\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = L$.*

*Remarque* 2.2. (**Limite d'une suite géométrique**)
Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère la suite réelle définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = a^n$
- Si $a > 1$ $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
- Si $|a| < 1$ $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.
- Si $a = 1$ $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$.
- Si $a \leq -1$ la suite $(u_n)$ n'admet pas de limite.

*Conséquence* 2.0.1.
1. Si $a$ et $\alpha$ sont deux réels avec $a > 1$ alors la suite $(u_n)$ définie par $u_n = \frac{n^\alpha}{a^n}$ admet 0 pour limite lorsque $n \to +\infty$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$$

**Proposition 2.0.3.** ***(Limite et relation d'ordre)***

1. *Si $(u_n)$ et $(v_n)$ sont deux suites réelles, $(l, l') \in \mathbb{R}^2$ telles que $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n = l'$ et si $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang, alors $l \leq l'$.*
2. *Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$ et $u_n \leq M$ à partir d'un certain rang alors $l \leq M$.*
3. *Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$ et $m \leq u_n$ à partir d'un certain rang alors $m \leq l$.*

*A l'inverse :*

1. *Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$ et $l < M$ alors $u_n < M$ à partir d'un certain rang.*
2. *$\lim_{n\to+\infty} u_n = l$ et $m < l$ alors $m < u_n$ à partir d'un certain rang.*

*Remarque* 2.3. On retiendra que les relations d'ordre **strict** ne sont pas conservées par passage à la limite (considérer l'exemple de la suite définie par $u_n = \frac{1}{n} > 0$).

**Proposition 2.0.4.** ***(Théorèmes d'existence de la limite)***
*Soient $(u_n)$, $(M_n)$ et $(m_n)$ trois suites réelles.*

1. *Si $\lim_{n\to+\infty} m_n = \lim_{n\to+\infty} M_n = l$ et si $m_n \leq u_n \leq M_n$ à partir d'un certain rang alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$ (théorème des ≪ gendarmes ≫ ou d'encadrement).*
2. *Si $\lim_{n\to+\infty} m_n = +\infty$ et si $m_n \leq u_n$ à partir d'un certain rang alors $(u_n)$ admet une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$ et $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ (théorème de minoration).*
3. *Si $\lim_{n\to+\infty} M_n = -\infty$ et si $u_n \leq M_n$ à partir d'un certain rang alors $(u_n)$ admet une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$ et $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ (théorème de majoration).*

*Conséquence* 2.0.2. Soient $(u_n)$ et $(\varepsilon_n)$ deux suites réelles.

1. Si $|u_n| \leq \varepsilon_n$ à partir d'un certain rang et si $\lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$ alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.
2. Si $(u_n)$ est une suite **bornée** et si $\lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$ alors $\lim_{n\to+\infty} u_n\varepsilon_n = 0$

**Proposition 2.0.5.** ***(Théorème de la limite monotone)***
*Soit $(u_n)$ une suite réelle.*
*Si $(u_n)$ est monotone alors elle admet une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$. Plus précisemment :*

1. *Si $(u_n)$ est croissante soit elle est majorée et elle converge alors vers $\sup\{\, u_n \mid n \in \mathbb{N} \,\}$ soit elle n'est pas majorée et elle converge alors vers $+\infty$.*

2. *Si $(u_n)$ est décroissante soit elle est minorée et elle converge alors vers* $\inf\{ u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ *soit elle n'est pas minorée et elle converge alors vers $-\infty$.*

*Remarque* 2.4. — Une suite admettant une limite n'est pas nécessairement monotone. Exemple : $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$ ;
— Une suite croissante et majorée par un réel $M$ n'a aucune raison de converger vers $M$ (différence entre majorant et borne supérieure).

**Proposition 2.0.6.** ***(Suites adjacentes)***
*Si $(u_n)$ et $(v_n)$ sont deux suites réelles on dit qu'elles sont* adjacentes *si et seulement si :*

1. *l'une est croissante...*
2. *l'autre décroissante et*
3. $\lim_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$.

*Dans ce cas :*

1. *Elles convergent vers une limite commune $l$ ;*
2. *$l$ est majorée par tous les éléments de la suite décroisssante et minorée par tous ceux de la suite croissante.*

**Proposition 2.0.7.** ***(Théorème de Bolzano-Weierstrass)***
*De toute suite bornée de réels on peut extraire une suite convergente.*

**Définition 2.0.1.** (**Suites de Cauchy**)
on dit qu'une suite numérique est une suite de CAUCHY si et seulement si

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists n \in \mathbb{N})(\forall(p, q) \in \mathbb{N}^2) \quad p \geq N \text{ et } q \geq N \Rightarrow |u_p - u_q| \leq \varepsilon.$$

*Conséquence* 2.0.3. 1. Toute suite convergente est une suite de CAUCHY.
2. Toute suite de CAUCHY est bornée.
3. Dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ toute suite de CAUCHY est convergente (**Faux** dans $\mathbb{Q}$ !)

# 3 Comparaison des suites

Le but de cete section est de comparer et distinguer des suites admettant la même limite dans $\overline{\mathbb{R}}$.

## 3.1 Négligeabilité

**Définition 3.1.1.** Si $(u_n)$ et $(v_n)$ sont deux suites numériques. On dira que $(u_n)$ est négligeable devant $(v_n)$ si et seulement si il existe une suite $(\varepsilon_n)$ de limite nulle et un rang à partir duquel on a : $u_n = \varepsilon_n v_n$. On notera $u_n = o(v_n)$ (« $u_n$ est un petit o de $v_n$ »).
Lorsque la suite $v_n$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang cette définition équivaut à

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0.$$

*Remarque* 3.1. $u_n = o(0)$ signifie que la suite $u_n$ est identiquement nulle à partir d'un certain rang. Il n'y a aucun intéret à comparer une suite $(u_n)$ avec la suite identiquement nulle.

**Proposition 3.1.1.** ***(Propriétés)***

1. *La multiplication par un scalaire non nul est transparente :*
   $u_n = o(v_n) \Leftrightarrow \lambda u_n = o(v_n) \Leftrightarrow u_n = o(\lambda v_n)$ *etc.*
2. *La somme de deux suites négligeables devant une même troisième est négligeable devant cette dernière.*
3. *La relation de négligeabilité est transitive.*
4. *On peut multiplier membre à membre deux relations de négligeabilité.*

*Par contre :*
***pas d'addition membre à membre*** *ni de* ***composition à gauche par une fonction****.*

**Proposition 3.1.2.** ***(Limite et « o »)***
*Soit $(u_n)$ une suite numérique et $l \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.*
*alors* $\lim_{n\to+\infty} = l \Leftrightarrow u_n = l + o(1)$.
*En particulier* $\lim_{n\to+\infty} = 0 \Leftrightarrow u_n = o(1)$.

## 3.2 Equivalence

**Définition 3.2.1.** Si $(u_n)$ et $(v_n)$ sont deux suites numériques. On dira que $(u_n)$ est équivalente à $(v_n)$ si et seulement si il existe une suite $(r_n)$ de limite égale à 1 et un rang à partir duquel on a : $u_n = r_n v_n$.
On notera $u_n \overset{+\infty}{\sim} v_n$ ou, puisque pour les suites il n'y a aucune confusion possible, $u_n \sim v_n$.
Lorsque la suite $(v_n)$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang, cette définition est équivalente à

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1.$$

**Proposition 3.2.1.** ***(Equivalence et « o »)***
*Soient $(u_n)$ et $(v_n)$ deux suites numériques.*

$$u_n \sim v_n \Leftrightarrow u_n = v_n + o(v_n).$$

*Remarque* 3.2. **Attention :** les propositions $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$ ($u_n = v_n + o(v_n)$) et $\lim_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$ ($u_n = v_n + o(1)$) non seulement ne sont pas équivalentes mais aucune n'implique l'autre.

**Proposition 3.2.2.** ***(Propriétés)***

1. *La relation $\sim$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble des suites.*
2. *Dans les relations de négligeabilité on peut remplacer toute suite par une suite équivalente.*
3. *Deux suites équivalentes ont même signe à partir d'un certain rang.*
4. *Les produit, passage à l'inverse, fonctions puissances conservent les relations d'équivalence.*

*Par contre :*
***pas d'addition membre à membre*** *ni de* ***composition à gauche par une fonction****.*

**Proposition 3.2.3.** ***(Limites et équivalents)***
*Soient $(u_n)$ et $(v_n)$ deux suites numériques.*

1. *Si $u_n \sim v_n$ alors, soit les deux suites n'admettent aucune limite soit elles en admettent une toutes les deux et c'est la même.*
2. *Si $\lim_{\to+\infty} = l$ où $l$ est un réel* ***non nul*** *alors $u_n \sim l$.*

**Proposition 3.2.4.** ***(Exemples fondamentaux)***
*$(u_n)$ étant une suite de limite nulle, on a*

**logarithme, puissance, exponentielle**

$$\begin{array}{ll} \ln(1+u_n) \sim u_n & \ln(1+u_n) = u_n + o(u_n) \\ e^{u_n} - 1 \sim u_n & e^{u_n} = 1 + u_n + o(u_n) \end{array}$$

*Si $\alpha$ est un réel (donc une constante !) :*

$$(1+u_n)^\alpha - 1 \sim \alpha u_n \Leftrightarrow (1+u_n)^\alpha = 1 + \alpha u_n + o(u_n)$$

**fonctions trigonométriques**

$$\begin{array}{ll} \sin u_n \sim u_n & \sin u_n = u_n + o(u_n) \\ \cos u_n - 1 \sim -\dfrac{u_n^2}{2} & \cos u_n = 1 - \dfrac{u_n^2}{2} + o(u_n^2) \\ \tan u_n \sim u_n & \tan u_n = u_n + o(u_n) \end{array}$$

**fonctions trigonométriques réciproques**

$$\begin{array}{ll} \arcsin u_n \sim u_n & \arcsin u_n = u_n + o(u_n) \\ \arctan u_n \sim u_n & \arctan u_n = u_n + o(u_n) \end{array}$$

*On a de même :*

$$\arccos u_n - \frac{\pi}{2} \sim -u_n \Leftrightarrow \arccos u_n = \frac{\pi}{2} - u_n + o(u_n)$$

**fonctions trigonométriques hyperboliques**

$$\begin{array}{ll} \operatorname{sh} u_n \sim u_n & \operatorname{sh} u_n = u_n + o(u_n) \\ \operatorname{th} u_n \sim u_n & \operatorname{th} u_n = u_n + o(u_n) \end{array}$$

*On a de même :*

$$\operatorname{ch} u_n - 1 \sim \frac{u_n^2}{2} \Leftrightarrow \operatorname{ch} u_n = 1 + \frac{u_n^2}{2} + o(u_n^2)$$

*Remarque* 3.3. On a également les cas particuliers importants suivants (avec toujours $u_n = o(1)$) :

$$\frac{1}{1+u_n} = 1 - u_n + o(u_n)$$
$$\sqrt{1+u_n} = 1 + \frac{1}{2}u_n + o(u_n)$$

## 3.3 Domination

**Définition 3.3.1.** Si $(u_n)$ et $(v_n)$ sont deux suites numériques on dira que $(u_n)$ est dominée par $(v_n)$ si et seulement si il existe une constante $K \in \mathbb{R}_+$ et un rang $n_0$ à partir duquel $|u_n| \leq K|v_n|$. On note $u_n = O(v_n)$.
Si la suite $(v_n)$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang $N$ alors

$$u_n = O(v_n) \Leftrightarrow \left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n \geq N} \text{ est bornée}$$

**Exemple 3.3.1.** Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}:\ u_{3n} = 9n \quad u_{3n+1} = n \quad u_{3n+2} = 1$$

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} |u_{3n}| & = 3 \times 3n \\ |u_{3n+1}| & = n \leq 3 \times |3n+1| \\ |u_{3n+2}| & = 1 \leq 3 \times |3n+2| \end{cases}$$

On a donc $u_n = O(n)$ avec $K = 3$ (par exemple). On voit que $u_n$ a beau être tantôt « plus grand

que ≫ $n$ ($u_{3n}=9n$), tantôt ≪ plus petit ou égal ≫ à $n$ ($u_{3n+1}=n$) et tantôt ≪ très petit ≫ par rapport à $n$ ($u_{3n+2}=1$), dans tous les cas $u_n$ n'est jamais ≪ beaucoup plus grand que ≫ $n$ (dans le sens ou $n^2$ par exemple l'est).
On peut remarquer que la suite $u_n$ n'est ni équivalente à $n$ ni négligeable devant $n$. On a donc bien une troisième relation de comparaison distincte des deux précédentes.

**Proposition 3.3.1.** ***(Suite bornée et ≪ O ≫)***
*Soit $(u_n)$ une suite numérique. Alors*

$$u_n = O(1) \Leftrightarrow (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \textit{ est bornée.}$$

**Proposition 3.3.2.** ***(Propriétés)***

1. *La négligeabilité et l'équivalence impliquent la domination. Autrement dit, si $(u_n)$ et $(v_n)$ sont deux suites numériques :*
$$u_n = o(v_n) \Rightarrow u_n = O(v_n)$$
$$u_n \sim v_n \Rightarrow u_n = O(v_n)$$
2. *La multiplication par un réel non nul est totalement transparente.*
3. *La somme de deux suites dominées par une même troisième est dominée par cette dernière.*
4. *La relation de domination est transitive.*
5. *La relation de domination est compatible avec le produit des suites (on peut multiplier membre à membre deux relations de domination).*

*Par contre :*
***pas d'addition membre à membre*** *ni de* ***composition à gauche par une fonction****.*

## 3.4 Développements Asymptotiques

**Définition 3.4.1.** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On appellera développement asymptotique (DAS) (pour $n$ dans un voisinage de $+\infty$) à $k$ termes (ou à la précision $o\big(f_k(n)\big)$) une somme

$$u_n = c_1 f_1(n) + c_2 f_2(n) + \cdots c_k f_k(n)$$

où les $c_i$ $i=1\ldots k$ sont des scalaires non nuls de $\mathbb{K}$, les $f_i$ des fonctions à valeurs dans $\mathbb{K}$ et pour tout $i$, $1\le i\le k-1$, $f_{i+1}(n) = o\big(f_i(n)\big)$.
La différence

$$u_n - c_1 f_1(n) - c_2 f_2(n) - \cdots - c_k f_k(n)$$

est appelée le *reste* du développement asymptotique et est, par construction, négligeable devant $f_k(n)$. Le premier terme du DAS de $u_n$, $c_1 f_1(n)$, est appelé la *partie principale* du DAS de $u_n$. C'est l'équivalent de $u_n$ pour $n$ au voisinage de $+\infty$.

**Exemple 3.4.1.** Exemples fondamentaux à connaître :
Pour $\mathbf{u_n = o(1)}$ :

$$\ln(1+u_n) = u_n - \frac{u_n^2}{2} + \frac{u_n^3}{3} + \cdots + (-1)^{k-1}\frac{u_n^k}{k} + o\big(u_n^k\big)$$
$$\ln(1-u_n) = -u_n - \frac{u_n^2}{2} - \frac{u_n^3}{3} - \cdots - \frac{u_n^k}{k} + o\big(u_n^k\big)$$

On peut remplacer dans les égalités précédentes $o\big(u_n^k\big)$ par $O\big(u_n^{k+1}\big)$.

$$e^{u_n} = 1 + \frac{u_n}{1!} + \frac{u_n^2}{2!} + \frac{u_n^3}{3!} + \cdots + \frac{u_n^k}{k!} + o\big(u_n^k\big)$$
$$(1+u_n)^\alpha = 1 + \alpha u_n + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}u_n^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}u_n^3 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}u_n^k + o\big(u_n^k\big)$$

Dans cette dernière égalité $\alpha$ **est une constante réelle**. Même remarque que précédemment.

$$\sin(u_n) = u_n - \frac{u_n^3}{3!} + \frac{u_n^5}{5!} + \cdots + (-1)^k\frac{u_n^{2k+1}}{(2k+1)!} + o\big(u_n^{2k+1}\big)$$

Dans cette dernière égalité on peut remplacer $o\big(u_n^{2k+1}\big)$ par $O\big(u_n^{2k+3}\big)$.

$$\cos(u_n) = 1 - \frac{u_n^2}{2!} + \frac{u_n^4}{4!} + \cdots + (-1)^k\frac{u_n^{2k}}{(2k)!} + o\big(u_n^{2k}\big)$$

Dans cette dernière égalité on peut remplacer $o\big(u_n^{2k}\big)$ par $O\big(u_n^{2k+2}\big)$.

# 4 Suites définies par une relation de récurrence : $u_{n+1} = f(u_n)$

**Proposition 4.0.1.** ***(Existence d'une suite définie par récurrence)***
*Soient $D$ une partie de $\mathbb{R}$ (en général un intervalle)*

*et $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur $D$ telle que $f^{+}(D) \subset D$ ou encore telle que $D$ soit stable par $f$. Alors pour tout $\alpha \in D$ il existe une et une seule suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_0 = \alpha$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ : $u_{n+1} = f(u_n)$. Cette suite est alors à valeurs dans $D$.*

**Proposition 4.0.2.** ***(Sens de variation d'une suite définie par récurrence)***
*Soit $D \subset \mathbb{R}$, $f\colon D \to D$ une fonction et $u_0 \in D$. On considère la suite définie par son premier terme et la relation $u_{n+1} = f(u_n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$.*

1. *Si $f$ est croissante alors $(u_n)$ est monotone et son sens de variation est donné par la position relative de $u_1$ par rapport à $u_0$.*
2. *Si $f$ est décroissante alors $(u_{2n})$ et $(u_{2n+1})$ sont monotones de sens de variations contraires déterminés entièrement par la position de $u_2$ par rapport à $u_0$.*

**Proposition 4.0.3.** ***(Limite des suites définies par récurrence)***
*Soit $D \subset \mathbb{R}$, $f\colon D \to D$ une fonction et $u_0 \in D$. On considère la suite définie par son premier terme et la relation $u_{n+1} = f(u_n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$.*
*Si $(u_n)$ converge vers un certain réel $l$ et si $f$ est continue en $l$ alors $l$ est un point fixe de $l$ c'est à dire $f(l) = l$.*