Séries Numériques

P. Gosse

1er décembre 2020

« La valeur d'avoir pendant quelques temps pratiqué avec rigueur une science exacte ne réside pas précisement dans ses résultats car ceux-ci comparés à l'océan de ce qui vaut d'être sû, n'en seront qu'une goutte infiniment petite.
Mais on en retire un surcroît d'énergie, de logique déductive, de ténacité dans l'effort soutenu ; on a appris à atteindre un but par des moyens adaptés à ce but. C'est en ce sens qu'il est très précieux, en vue de tout ce que l'on fera plus tard, d'avoir été une fois dans sa vie, homme de science. »
Friedrich Nietzsche

Table des matières

1 Généralités

Définition 1.0.1. On dit que la série de terme général u_n converge si et seulement si la suite $(S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k)$ de ses sommes partielles converge vers un réel appelé somme de la série $\sum u_n$. On définit également lorsque cela a un sens la suite des restes d'ordre n de la série $\sum u_n$ comme la suite $(R_n = \sum_{k\geq n+1} u_k)$.

Proposition 1.0.1. *On ne change pas la nature d'une série en modifiant un nombre fini de ses termes (mais on modifie certainement la* valeur *de sa somme !).*

Exemple 1.0.1. La série géométrique $\sum_{n\geq 0} a^n$ avec $a \in \mathbb{R}$ converge si et seulement si $|a| < 1$ et sa somme vaut $\frac{1}{1-a}$.

Proposition 1.0.2. *On note $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries numériques à termes généraux dans $\mathbb{K}$ et α un élément de $\mathbb{K}$. On note $\sum(\alpha u_n + v_n)$ la série de terme général $\alpha u_n + v_n$. Si les deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont pour sommes resperctives S et T alors la série $\sum(\alpha u_n + v_n)$ est convergente et a pour somme $\alpha S + T$.*
L'ensemble des séries numériques convergentes est donc un sous espace vectoriel du $\mathbb{K}$ espace vectoriel des séries numériques à termes dans $\mathbb{K}$.

Conséquence 1.0.1. La somme du terme général d'une série convergente et du terme général d'une série divergente est le terme général d'une série *divergente*.

Proposition 1.0.3. ***(Condition nécessaire de convergence)***
Si une série $\sum u_n$ converge alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Remarque 1.1. La réciproque est bien sûr **fausse** : la série harmonique $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge mais $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Définition 1.0.2. Une série $\sum u_n$ dont le terme général ne tend pas vers 0 diverge *grosssièrement*.

Conséquence 1.0.2. Une suite télescopique $\sum_{n\geq 0}(a_n - a_{n+1})$ a même nature que la **suite** (a_n) et en cas de convergence on a $\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n - a_{n+1}) = a_0 - \lim_{n\to+\infty} a_n$.

Proposition 1.0.4. ***(Critère de Cauchy pour les séries)***
Une série (à termes réels ou complexes) $\sum u_n$ converge si et seulement si elle vérifie le Critère de Cauchy :

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})\colon (\forall n \in \mathbb{N})(\forall p \in \mathbb{N}^*)$$
$$n \geq N \Rightarrow \Big|\sum_{k=n+1}^{p} u_k\Big| < \varepsilon \quad (1.1)$$

Définition 1.0.3. Une série $\sum u_n$ à termes réels ou complexes est dite *absolument convergente* si et seulement si la série à termes positifs $\sum |u_n|$ est convergente.

Proposition 1.0.5. *Toute série absolument convergente est convergente.*

Remarque 1.2. La réciproque est fausse ! Comme le montre l'exemple de la série harmonique alternée $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$.

2 Séries à termes positifs

2.1 Comparaison et convergence

Proposition 2.1.1. *Une série à termes positifs converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée. Sinon elle diverge vers $+\infty$.*

Proposition 2.1.2. ***(Règle de Comparaison)***
Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs telles que $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n \leq v_n$.

1. *Si la série $\sum v_n$ converge il en est de même de la série $\sum u_n$ et on a $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.*
2. *Si la série $\sum u_n$ diverge il en est de même de la série $\sum v_n$.*

Remarque 2.1. Si la relation $u_n \leq v_n$ n'est vérifiée qu'à partir d'un certain rang, les conclusions quand à la nature des deux séries restent vraies mais en cas de convergence, les relations entre les sommes ne sont en général plus vérifiées.

Proposition 2.1.3. ***(Règle d'équivalence)***
Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs telles que $u_n \sim v_n$ quand $n \to +\infty$. Alors

1. *Les deux séries sont de même nature.*
2. *En cas de convergence les restes d'ordre n sont équivalents.*
3. *En cas de divergence les sommes partielles d'ordre n sont équivalentes.*

Proposition 2.1.4. ***(Règle de Cauchy)***
Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs telle qu'il existe un réel $k\colon 0 \leq k<1$ et un rang n_0 à partir duquel on a $\sqrt[n]{u_n} \leq k$ alors la série $\sum u_n$ converge.
Si $u_n \geq 1$ à partir d'un certain rang la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.

Conséquence 2.1.1. Si $\sum u_n$ est une série à termes positifs telle que $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$.

1. Si $0 \leq l < 1$ la série converge.
2. Si $l > 1$ la série diverge grossièrement.
3. Si $l = 1$ *On ne peut pas conclure.*

Proposition 2.1.5. *Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes strictement positifs telles que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$ à partir d'un certain rang. Alors*

1. *Si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge.*
2. *Si $\sum u_n$ diverge alors $\sum v_n$ diverge.*

Proposition 2.1.6. ***(Règle de d'Alembert)***
Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes strictement positifs telles qu'il existe un réel $k\colon 0 \leq k < 1$ et un rang à partir duquel $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq k$ alors la série converge.
Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ à partir d'un certain rang la série diverge grossièrement.

Conséquence 2.1.2. Si $\sum u_n$ est une série à termes positifs telle que $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$.

1. Si $0 \leq l < 1$ la série converge.
2. Si $l > 1$ la série diverge grossièrement.
3. Si $l = 1$ *On ne peut pas conclure.*

Proposition 2.1.7. ***(Séries de Riemann)***
La série de Riemann $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ où α est une constante *réelle converge si et seulement si $\alpha > 1$.*

Proposition 2.1.8. ***(Comparaison avec une intégrale)***
Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs. On pose $u_n = f(n)$. Si f est une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, continue, décroissante et de limite nulle à l'infini alors la série $\sum u_n$ et l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(t)dt$ sont de même nature.

Conséquence 2.1.3. (**Sommation des relations de comparaison pour les séries de Riemann**)
Soit α un réel positif.

1. Si $\alpha > 1$, $\sum_{k\geq n+1} \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{n^{\alpha-1}}$.
2. Si $\alpha = 1$, $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \sim \ln n$.
3. Si $\alpha < 1$ $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$.

Remarque 2.2. Tout ce qui vient d'être dit pour des séries à termes positifs peut s'étendre au cas des séries à termes *constamment* négatifs. Si $\sum u_n$ est une telle série il suffit de poser $v_n = -u_n$ et d'appliquer ce qui précède à v_n.

3 Séries à termes de signe quelconque

Définition 3.0.1. La série $\sum v_n$ à termes réels est dite *alternée* lorsque son terme général s'écrit $v_n = (-1)^n u_n$ avec (u_n) suite à termes de signe constant (généralement positif).

Proposition 3.0.1. ***(Théorème Spécial des Séries Alternées : TSSA)***
Soit $\sum(-1)^n u_n$ une série alternée avec (u_n) suite à termes positifs. Si la suite (u_n) tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ en décroissant alors

1. *La série est convergente.*
2. *Sa somme S est comprise entre deux sommes partielles consécutives.*
3. *Son reste d'ordre n vérifie :*

$$|R_n| \leq |(-1)^{n+1} u_{n+1}| = u_{n+1}.$$

Conséquence 3.0.1. (**Règle d'étude des séries à termes de signe quelconque**)
Pour étudier $\sum u_n$ on effectue un développement asymptotique de son terme général jusqu'à la précision «grand O du premier terme absolument convergent». On étudie la nature des termes qui précèdent. S'il sont tous convergents la série converge. Si un des termes diverge la série diverge également.

4 Calcul approché de la somme d'une série

Le principe du calcul approché de la somme d'une série numérique est de considérer la suite des sommes partielles de rang n (S_n) comme des approximations successives et de précision croissante de la somme réelle S inconnue avec une erreur valant R_n le reste d'ordre n tout aussi inconnu. Le but est donc de trouver un majorant *simple* de $|R_n|$.

4.1 Séries à termes positifs

4.1.1 Séries relevant de la règle de Cauchy

Proposition 4.1.1. *Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs. S'il existe une constante réelle k: $0 \leq k < 1$ et un rang n_0 à partir duquel on a $\sqrt[n]{u_n} \leq k$ alors pour $n \geq n_0$ on aura : $R_n \leq \frac{k^{n+1}}{1-k}$.*

4.1.2 Séries relevant de la règle de d'Alembert

Proposition 4.1.2. *Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs. S'il existe une constante réelle k: $0 \leq k < 1$ et un rang n_0 à partir duquel on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq k$ alors pour $n \geq n_0$ on aura : $R_n \leq u_n \frac{k}{1-k}$.*

4.1.3 séries relevant d'une comparaison avec une série de Riemann

Proposition 4.1.3. *Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs. S'il existe un réel $\alpha > 1$ et un rang n_0 à partir duquel on a $0 < u_n \leq \frac{1}{n^\alpha}$ alors pour $n \geq n_0$ on a*

$$\int_n^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} - u_n \leq R_n \leq \int_n^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$$

et donc

$$S_n + \int_n^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} - u_n \leq S \leq S_n + \int_n^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$$

Autrement dit : $S_n + \int_n^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ est une valeur approchée de la somme S de la série $\sum u_n$ par excès avec une erreur inférieure à u_n.

4.2 Séries à termes de signe quelconque

4.2.1 Séries absolument convergentes

Si $\sum u_n$ une série à termes réels absolument convergente alors $|R_n| \leq \sum_{k=n+1} |u_k|$ et on est ramené à la section 4.1.

4.2.2 Séries relevant du TSSA

La majoration est donnée par le TSSA lui même : $|R_n| \leq |u_{n+1}|$.

5 Séries à termes complexes

Dans cette section $\sum u_n$ désigne une série à termes complexes. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_n = a_n + ib_n$ avec a_n et b_n les parties réelle et imaginaire de u_n.

Proposition 5.0.1. *La série à termes complexes $\sum u_n$ converge si et seulement si les séries à termes réels $\sum a_n$ et $\sum b_n$ convergent et on a*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n + i \sum_{n=0}^{+\infty} b_n.$$

Proposition 5.0.2. *Si la série (à termes positifs) des modules $\sum|u_n|$ converge, alors les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont absolument convergentes et la série $\sum u_n$ converge dans $\mathbb{C}$.*

6 Produit de Cauchy

Définition 6.0.1. On appelle *produit de Cauchy* de deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ à termes réels ou complexes, la série de terme général

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} = \sum_{i+j=n} u_i v_j$$

Proposition 6.0.1. *Le produit de Cauchy de deux séries à termes positifs $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergentes est convergent et on a :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}\right) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right) \tag{6.1}$$

Le produit de Cauchy de deux séries à termes complexes $\sum u_n$ et $\sum v_n$ dont les séries des modules convergent est convergent (ainsi que la série des modules associée) et on a la relation 6.1.
Le produit de Cauchy de deux séries à termes réels $\sum u_n$ et $\sum v_n$ absolument convergentes est absolument convergent et on a également la relation 6.1.