Synthèse Séries de Fourier

P. Gosse

26 mai 2020

Table des matières

1 Famille orthonormée de polynômes Trigonométriques

1.1 Cas complexe

Proposition 1.1.1. *pour tout couple d'entiers relatifs (n, m), on pose*

$$I(n,m) = \int_{-\pi}^{+\pi} e^{inx} e^{-imx}$$

Alors

$$I(n,m) = \begin{cases} 0 & si\ n \neq m \\ 2\pi & si\ n = m \end{cases}$$

1.2 Cas réel

Proposition 1.2.1. *pour tout couple d'entiers naturels (n, m), on pose*

$$J(n,m) = \int_{-\pi}^{+\pi} \cos nx \cos mx dx$$
$$K(n,m) = \int_{-\pi}^{+\pi} \cos nx \sin mx dx$$
$$L(n,m) = \int_{-\pi}^{+\pi} \sin nx \sin mx dx$$

Alors :

$$J(n,m) = \begin{cases} 2\pi & si\ n = m = 0 \\ \pi & si\ n = m \neq 0 \\ 0 & si\ n \neq m \end{cases}$$

$$K(n,m) = 0\ \forall (n,m) \in \mathbb{N}^2$$

$$L(n,m) = \begin{cases} \pi & si\ n = m \neq 0 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

2 Série de Fourier d'une fonction périodique

2.1 Cas complexe

On suppose que f est une fonction 2π périodique, continue par morceaux sur sa période, de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Définition 2.1.1. (**Coefficients et série de fourier complexes**)
Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on appelle n ième coefficient de FOURIER complexe de f le nombre

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(t) e^{-int} dt$$

et, sous réserve de convergence, série de FOURIER complexe associée à f la série de fonctions définie par :

$$\mathcal{F}(f)(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) e^{inx}$$

2.2 Cas réel

On suppose que f est une fonction 2π périodique, continue par morceaux sur sa période, de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Définition 2.2.1. (**Coefficients et série de fourier réels**) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on appelle n ièmes coefficients de FOURIER réels (ou trigonométriques) les nombres

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\cos ntdt$$
$$b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\sin ntdt$$

et, sous réserve de convergence, série de FOURIER réelle associée à f la série de fonctions définie par :

$$\mathcal{F}(f)(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(f)\cos nx + b_n(f)\sin nx$$

Conséquence 2.2.1. On a les relations suivantes entre les coefficients de fourier complexes et les coefficients de fourier réels :

$$a_n(f) = c_n(f) + c_{-n}(f)$$
$$b_n(f) = i(c_n(f) - c_{-n}(f))$$

Attention : dans ce cours nous faisons la convention $a_0(f) = 2c_0(f)$ ce qui évite d'avoir à considérer une formule particulière pour calculer le coefficient $a_0(f)$ mais impose le terme $\frac{a_0(f)}{2}$ dans l'expression de la série de FOURIER.
Et en inversant ces relations :

$$c_n(f) = \frac{1}{2}\big(a_n(f) - ib_n(f)\big)$$
$$c_{-n}(f) = \frac{1}{2}\big(a_n(f) + ib_n(f)\big)$$

2.3 Cas d'une fonction paire ou impaire

Proposition 2.3.1. *Si f est une fonction paire 2π périodique continue par morceaux sur sa période à valeurs réelles alors pour tout entier naturel n :*

$$a_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\pi} f(t)\cos ntdt$$
$$b_n(f) = 0$$

Si f est impaire 2π périodique continue par morceaux sur sa période à valeurs réelles alors pour tout entier naturel n :

$$a_n(f) = 0$$
$$b_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\pi} f(t)\sin ntdt$$

2.4 Cas d'une fonction $\mathcal{C}^k$

2.4.1 Cas d'une fonction $\mathcal{C}^1$

Proposition 2.4.1. *Soit f une fonction 2π périodique, de classe $\mathcal{C}^1$ sur sa période à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Alors pour tout entier relatif n :*

$$c_n(f') = (in)c_n(f)$$

et pour tout entier naturel n :

$$a_n(f') = nb_n(f) \text{ et } b_n(f') = -na_n(f)$$

Conséquence 2.4.1. Si f est $\mathcal{C}^1$ sur $[-\pi, +\pi]$ alors

$$c_n(f) \overset{+\infty}{=} O\big(\frac{1}{n}\big)$$

2.4.2 Cas d'une fonction $\mathcal{C}^k$:

Proposition 2.4.2. *Par récurrence on démontre aisément que si f a toutes les propriétés précédentes mais est de plus $\mathcal{C}^k$ sur sa période (avec $k \geq 2$) alors pour tout entier relatif n :*

$$c_n(f^{(k)}) = (in)^k c_n(f)$$

Ce qui implique alors que

$$c_n(f) \overset{+\infty}{=} O\big(\frac{1}{n^k}\big)$$

2.5 Cas d'une fonction T périodique :

Proposition 2.5.1. *Soit f une fonction T périodique à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, continue par morceaux sur sa période. On pose $\omega = \frac{2\pi}{T}$ et on définit alors* *les coefficients de* FOURIER *complexes de f pour tout $n \in \mathbb{Z}$ par*

$$c_n(f) = \frac{1}{T}\int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)e^{-in\omega t}$$

et la série de FOURIER *complexe associée à f par :*

$$\mathcal{F}(f)(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)e^{in\omega x}$$

Dans le cas réel, on définit les coefficients de FOURIER *réels de f pour tout $n \in \mathbb{N}$ par*

$$a_n(f) = \frac{2}{T}\int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos n\omega t dt$$

$$b_n(f) = \frac{2}{T}\int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin n\omega t dt$$

et la série de FOURIER *réelle associée à f par :*

$$\mathcal{F}(f)(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\big(a_n(f)\cos n\omega x + b_n(f)\sin n\omega x\big)$$

3 Problèmes de convergence

3.1 Convergence de la série de FOURIER

Proposition 3.1.1. *Si $f$est une fonction 2π périodique continue par morceaux sur sa période et à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, en posant $u_0(x) = \frac{a_0(f)}{2}$ et pour tout $n \geq 1$, $u_n(x) = a_n(f)\cos nx + b_n(f)\sin nx$, on a le résultat suivant :*
Si les séries $\sum_{n\geq 0} a_n(f)$ et $\sum_{n\geq 1} b_n(f)$ sont absolument convergentes alors la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} u_n(x)$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

Conséquence 3.1.1.

1. La série de FOURIER de f est alors intégrable terme à terme sur $\mathbb{R}$ et si la série $\sum_{n\geq 0} u'_n(x)$ converge également uniformément sur $\mathbb{R}$ elle est en plus dérivable terme à terme sur $\mathbb{R}$.
   En tous les cas, la série de FOURIER de f est 2π périodique et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Dans les hypothèses précédentes, si on suppose de plus les séries $\sum_{n\geq 0} a_n(f)$ et $\sum_{n\geq 0} b_n(f)$ absolument convergentes, en posant $g(x) = \mathcal{F}(f)(x)$ et en utilisant les résultats du paragraphe 1 on montre que $\mathcal{F}(g) = \mathcal{F}\big(\mathcal{F}(f)\big) = \mathcal{F}(f)$. Ce qui laisse penser que l'opérateur série de FOURIER agit comme un opérateur linéaire bien connu.

3.2 Les théorèmes de convergence

Proposition 3.2.1. *(**Premier théorème de DIRICHLET**)*
Si f est une fonction 2π périodique, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur sa période, alors la série de FOURIER *de f converge simplement vers la* régularisée *f^* de f sur $\mathbb{R}$ où*

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f^*(x) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$$

En particulier, en tout point de continuité de f, la série de FOURIER *de f converge simplement vers $f(x)$.*

Proposition 3.2.2. *(**Second théorème de DIRICHLET**)*
*Si f est une fonction 2π périodique, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur sa période et **continue sur** $\mathbb{R}$, alors la série de* FOURIER *de f converge normalement vers la fonction f sur $\mathbb{R}$.*
Autrement dit $(\forall x \in \mathbb{R})\, \mathcal{F}(f)(x) = f(x)$.

4 Géométrie et séries de FOURIER :

On note $E = \mathcal{C}^1_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ l'ensemble des applications 2π périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, $\mathcal{C}^1$ par morceaux mais continues sur leur période.
Sur $E \times E$ on définit φ à valeurs dans $\mathbb{C}$:

$$(f,g) \mapsto \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\overline{g(t)}dt$$

qui est un produit hermitien sur l'espace vetoriel complexe E (l'analogue d'un produit scalaire sur un $\mathbb{R}$ espace vetoriel). La norme associée (ou norme de la convergence en moyenne quadratique) est donnée pour tout $f \in E$ par :

$$\|f\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} |f(t)|^2 dt}$$

D'après les calculs du paragraphe 1, il est clair que la famille $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ où $e_n(t) = e^{int}$ forme une famille

orthonormée de E pour ce produit hermitien.
On pose

$$\begin{aligned} P_p &= \{\, e_n \mid n \in \{-p, -p+1, \dots, 0, 1, \dots p-1, p\} \,\} \\ P &= \{\, e_n \mid n \in \mathbb{Z} \,\} \end{aligned}$$

P_p est un espace pré hilbertien complexe de dimension $2p+1$ sur $\mathbb{C}$ et P est un espace hilbertien de dimension infinie dénombrable sur $\mathbb{C}$ dont $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base orthonormée.
Dans ce cadre on peut interpréter $\mathcal{F}\colon f \mapsto \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n(f)e^{inx}$ comme un endomorphisme de E et on a vu en 3.1 que c'est un projecteur de E.
Si $f \in E$ on note $g_p(f)$ le projeté orthogonal de f sur P_p. Comme $(e_{-p}, \dots, e_p)$ en est une base orthonormée il est immédiat que

$$g_p(f) = \sum_{n=-p}^{n=p} (f|e_n)e_n$$

mais par définition du produit scalaire hermitien :

$$(f|e_n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)e^{-int}dt = c_n(f)$$

4.1 Inégalité de BESSEL et formule de PARSEVAL :

Proposition 4.1.1. ***(Inégalité de* BESSEL*)***
Si $f \in E$ on a pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{n=-p}^{+p} |c_n|^2 \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} |f(t)|^2 dt$$

dans le cas complexe, et dans le cas réel :

$$\frac{|a_0(f)|^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{p}\big(a_n(f)^2 + b_n(f)^2\big) \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} |f(t)|^2 dt$$

Conséquence 4.1.1. Les théorèmes de convergence de 3.2 impliquent que $\lim_{p\to+\infty} \|f - g_p(f)\|_2 = 0$ et on a donc l'égalité

$$\|f\|_2^2 = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} |c_n(f)|^2$$

On en déduit la :

Proposition 4.1.2. ***(Formule de* PARSEVAL*)***
Pour $f \in E$ on a l'égalité :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} |f(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2$$

dans le cas complexe et dans le cas réel :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} |f(t)|^2 dt = \frac{|a_0(f)|^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\big(a_n(f)^2 + b_n(f)^2\big)$$

Remarque 4.1. On montre que la formule de PARSEVAL est encore valable si on suppose que f est seulement continue par morceaux sur sa période.