Intégration

P.Gosse

11 décembre 2016

Table des matières

1 Rappels

1.1 Fonctions continues par morceaux

Définition 1.1.1. On appelle *subdivision* d'un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ toute famille finie de réels $\sigma = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$ telle que $a_0 = a < a_1 < \ldots < a_n = b$.
Les a_i sont les points de la subdivision σ, les $]a_i, a_{i+1}[$ les intervalles de la subdivision et le réel $p(\sigma) = max_{0 \leq i \leq n-1}\{a_{i+1} - a_i\}$ le pas de la subdivision.
Une subdivision σ' sera dite *plus fine* que la subdivision σ si la subdivision σ' est une sur-famille de la subdivision σ.

Exemple 1.1.1. si n est un entier naturel non nul fixé et $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$, la subdivision définie par $(\forall i \in \{0, \ldots, n\})\, a_i = a + i\frac{b-a}{n}$ est appelée subdivision *uniforme* du segment $[a, b]$ ou subdivision à pas constant du segment $[a, b]$ ($p(\sigma) = \frac{b-a}{n}$).

Définition 1.1.2. Une fonction $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ est dite *en escalier* sur $[a, b]$ s'il existe une subdivision $\sigma = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$ de $[a, b]$ telle que f soit constante sur chaque intervalle $]a_i, a_{i+1}[$ de la subdivision (qui est dite dans ce cas *adaptée* à f).

Remarque 1.1. On note $\mathcal{E}\big([a, b], \mathbb{R}\big)$ l'ensemble des fonctions en escalier sur $[a, b]$ à valeurs réelles. Muni de l'addition des fonctions et de la multiplication de celles-ci par un scalaire c'est un sous espace vectoriel de l'espace vectoriel des fonctions de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. De plus si f et g sont des éléments de $\mathcal{E}\big([a, b], \mathbb{R}\big)$ alors fg et $|f|$, $|g|$ le sont aussi.

Remarque 1.2. Les valeurs prises par la fonction en escalier aux points de la subdivision n'ont pas d'importance.

Définition 1.1.3. Une fonction $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ est dite *continue par morceaux* sur $[a, b]$ si et seulement si il existe une subdivision σ de $[a, b]$ telle que

1. $(\forall i \in \{0, \ldots, n-1\})$ f est continue sur $]a_i, a_{i+1}[$.

2. $\lim_{a_i^+} f$ et $\lim_{a_{i+1}^-}$ existent et sont finies.

Remarque 1.3. Si f et g sont des foctions continues par morceaux sur $[a,b] \subset \mathbb{R}$ alors $f+g$, λf, λg, $\lambda f + g$ ($\lambda \in \mathbb{R}$) , fg, $|f|$ et $|g|$ le sont également.

Remarque 1.4. Les valeurs prises par une fonction continue par morceaux aux points de la subdivision ne comptent pas.

Proposition 1.1.1. *Toute fonction continue par morceaux sur $[a,b]$ est bornée sur $[a,b]$.*

Proposition 1.1.2. *Soit f une fonction continue par morceaux sur $I=[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe deux fonctions en escalier $\varphi, \psi \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ vérifiant :*

$$\forall x \in [a,b] \quad \varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x) \qquad \text{et} \quad 0 \leq (\psi - \varphi)(x) \leq \varepsilon \quad (1.1)$$

1.2 Intégration sur un segment

1.2.1 Intégrale d'une fonction en escalier

Définition 1.2.1. Soit $f \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction en escalier, $\sigma = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$ une subdivision adaptée à f, h_i le réel tel que $\forall i \in \{0, \ldots, n-1\}$ $(\forall x \in]a_i, a_{i+1}[)$ $f(x) = h_i$. Si on note $I_\sigma(f)$ le réel $I_\sigma(f) = \sum_{i=0}^{n-1} h_i(a_{i+1} - a_i)$ alors on montre que ce réel ne dépend pas de la subdivision σ adaptée à f dans le sens où si σ' est une subdivision plus fine que α et adaptée à f alors $I_{\sigma'}(f) = I_\sigma(f)$.
Ce réel est appelé *l'intégrale* de la fonction en escalier f sur $[a,b]$ et est notée $I_{[a,b]}(f)$.

Exemple 1.2.1. Si f est une fonction constante égale à λ sur $[a,b]$ alors $I_{[a,b]}(f) = \lambda(b-a)$. En particulier si f est nulle *sauf en un nombre fini de points* de $[a,b]$ alors $I_{[a,b]}(f) = 0$.

Proposition 1.2.1. ***(Propriétés de l'intégrale)***
Si $f, g \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions en escalier et λ un réel :

1. $I_{[a,b]}(f+g) = I_{[a,b]}(f) + I_{[a,b]}(g)$.
2. $I_{[a,b]}(\lambda f) = \lambda I_{[a,b]}(f)$.
3. *Si $\forall x \in [a,b]\, f(x) \geq 0$ alors $I_{[a,b]}(f) \geq 0$.*
4. *Si $\forall x \in [a,b]\, f(x) \geq g(x)$ alors $I_{[a,b]}(f) \geq I_{[a,b]}(g)$.*
5. *Si $c \in [a,b]$ $I_{[a,b]}(f) = I_{[a,c]}(f) + I_{[c,b]}(f)$.*

Définition 1.2.2. (**Intégrale d'une fonction continue par morceaux**)
On pose

$$\Phi = \{\, \varphi \in \mathcal{E}\big([a,b], \mathbb{R}\big) \mid \forall x \in [a,b]\ \varphi(x) \leq f(x) \,\}$$

et

$$\Psi = \{\, \psi \in \mathcal{E}\big([a,b], \mathbb{R}\big) \mid \forall x \in [a,b]\ f(x) \leq \psi(x) \,\}.$$

Alors $\sup\{\, I_{[a,b]}(\varphi) \mid \varphi \in \Phi \,\}$ et $\inf\{\, I_{[a,b]}(\psi) \mid \psi \in \Psi \,\}$ existent et sont égales.
On appelle *intégrale de f sur* $[a,b]$ cette valeur commune et on la note $\int_{[a,b]} f$ ou $\int_{[a,b]} f(t)dt$.

Remarque 1.5. C'est l'aire comprise entre l'axe des abscisses, les droites $x=a$ et $x=b$ et la courbe représentative de f, comptée positivement si elle se trouve au-dessus de l'axe des abscisses, négativement sinon.

Proposition 1.2.2. *On généralise les propriétés de la proposition 1.2.1 : si f et g sont deux fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$ on a*

1. *Si* $f(x) = g(x)$ sauf pour un nombre fini de points *alors* $\int_{[a,b]} f = \int_{[a,b]} g$.
2. *(**Inégalité triangulaire**) :*
$$\left| \int_{[a,b]} f \right| \leq \int_{[a,b]} |f|$$
3. *(**Relation de Chasles**) (voir 1.2.1)*
4. *(**Inégalité de la Moyenne**)*
Le réel $\mu(f) = \frac{1}{b-a} \int_{[a,b]}(f)$ est appelé valeur moyenne de f sur $[a,b]$.
Et on a
$$\left| \int_{[a,b]} fg \right| \leq \sup_{[a,b]} |f| \int_{[a,b]} |g|.$$
pour tout couple de fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$.
5. *(**Inégalité de Cauchy-Schwarz**)*
*Si f et g sont deux fonctions **continues** sur $[a,b]$*
$$\left(\int_{[a,b]} fg \right)^2 \leq \left(\int_{[a,b]} f^2 \right) \left(\int_{[a,b]} g^2 \right)$$
avec égalité si et seulement si les deux fonctions sont proportionnelles.

Définition 1.2.3. Par extension, on dira qu'une fonction f est continue par morceaux sur un intervalle I quelconque de $\mathbb{R}$ si et seulement si pour tout segment $[a,b] \subset I$, la *restriction* de f à $[a,b]$ est continue par morceaux.

Définition 1.2.4. (**l'intégrale fonction des deux bornes**)
Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux sur I un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$ et $a, b \in I$. On notera $\int_a^b f$ ou $\int_a^b f(t)dt$

$$\begin{array}{ll} \displaystyle\int_{[a,b]} f & \text{si } a < b \\ 0 & \text{si } a = b \\ \displaystyle -\int_{[b,a]} f & \text{si } a > b \end{array}$$

Et on généralise de nouveau à cette construction les propriétés 1.2.1 ainsi que les propriétés 1.2.2.

1.3 Primitives et Intégrales

Définition 1.3.1. (**primitive d'une fonction**)
On appelle primitive d'une fonction $f\colon I \to \mathbb{R}$ toute fonction $F\colon I \to \mathbb{R}$, dérivable vérifiant $F'(x) = f(x)$ $\forall x \in I$.

Remarque 1.6. Si F est une primitive de f sur I, l'ensemble des primitives de f sur I est constitué des fonctions $t \mapsto F(t) + C$ où C varie dans $\mathbb{R}$.
On note

$$\int f(t)dt = F(t) + C.$$

Si f est dérivable sur I alors on a

$$\int f'(t)dt = f(t) + C$$

Proposition 1.3.1. ***(Propriétés et primitives usuelles)***
Si $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions de primitives respectives F et G sur I alors λf et $f+g$ admettent αF et $F+G$ respectivement comme primitive sur I.

Remarque 1.7. On établit à l'aide de ces propriétés le tableau des primitives des fonctions usuelles auquel on renvoit le lecteur.

1.4 Intégrales et Primitives

Proposition 1.4.1. ***(Fonction continue et Primitives)***
Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour tout $a \in I$, f possède une unique primitive qui s'annule en a c'est la fonction

$$x \mapsto \int_a^x f(t)dt$$

Conséquence 1.4.1. — Toute fonction continue sur un intervalle I y admet des primitives.
— $f\colon I \to \mathbb{R}$ continue et F une primitive de f sur I alors

$$\forall (a,b) \in I^2 \int_a^b f(t)dt = \big[F(t)\big]_a^b = F(b) - F(a)$$

Proposition 1.4.2. ***(Positivité de l'intégrale)***
Soient $a < b$, $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Si f est ***continue****, positive et si $\int_a^b f(t)dt = 0$ alors $f = 0$ sur $[a,b]$.*

Conséquence 1.4.2. Si f est continue sur $[a,b]$ On aura

$$\begin{array}{ccc} \displaystyle\int_a^b |f(t)|dt = 0 & \Rightarrow & f = 0 \\ \displaystyle\int_a^b f(t)^2 dt = 0 & \Rightarrow & f = 0 \\ f \geq 0 \text{ et } f \neq 0 & \Rightarrow & \displaystyle\int_a^b f(t)dt > 0 \end{array}$$

Proposition 1.4.3. ***(Intégrale fonction des bornes)***
Soient $f\colon I \to \mathbb{R}$ continue, $u, v\colon J \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables à valeurs dans I, F une primitive de f sur I et

$$\varphi\colon x \mapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt$$

alors φ est dérivable sur I et

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= F\big(v(x)\big)' - F\big(u(x)\big)' \\ &= v'(x)f\big(v(x)\big) - u'(x)f\big(u(x)\big) \end{aligned} \tag{1.2}$$

2 Intégrales Impropres

2.1 Intégration sur $[a, +\infty[$

2.1.1 Convergence

Dans tout le paragraphe a est un réel quelconque.

Définition 2.1.1. Soit $f\colon [a,+\infty[\to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ continue par morceaux. On dit que l'*intégrale impropre ou généralisée* de f sur $[a,+\infty[$ converge si et seulement si l'*intégrale partielle* $\int_a^x f(t)dt$ admet une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$. On pose alors

$$\int_a^{+\infty} f(t)dt \overset{\text{def}}{=} \lim_{x\to+\infty}\int_a^x f(t)dt$$

Définition 2.1.2. (**Reste d'intégrale convergentes**)
Soit $f\colon [a,+\infty[\to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ continue par morceaux. Si l'intégrale de f sur $[a,+\infty[$ converge on appelle reste de l'intégrale convergente $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ la fonction

$$\begin{cases} [a,+\infty[& \to \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C} \\ x & \mapsto \int_x^{+\infty} f(t)dt \end{cases}$$

Conséquence 2.1.1. On ne change pas la nature de l'intégrale d'une fonction sur $[a,+\infty[$ en modifiant ses valeurs sur un segment $[a,c]\subset[a,+\infty[$. Seul compte le comportement de f au voisinage de $+\infty$.

Proposition 2.1.1. *Si $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge alors*

$$\int_a^{+\infty} f(t)dt = \int_a^x f(t)dt + \int_x^{+\infty} f(t)dt$$

Proposition 2.1.2. ***(Cas des fonctions continues)***
Si f est une fonction continue sur $[a,+\infty[$ en notant F une primitive de f sur $[a,+\infty[$ on a l'équivalence entre

1. *$\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge.*
2. *$F(x)$ admet une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$ et on a :*

$$\begin{aligned} \int_a^{+\infty} f(t)dt &= \big[F(x)\big]_a^{+\infty} \\ &= \lim_{x\to+\infty} F(x) - F(a) \end{aligned} \tag{2.1}$$

2.1.2 Propriétés des Intégrales impropres convergentes

$\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. **Linéarité** : Soient $f,g\colon [a,+\infty[\to \mathbb{K}$ continues par morceaux et $\lambda\in\mathbb{K}$. Si $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ et $\int_a^{+\infty} g(t)dt$ convergent alors il en est de même de $\int_a^{+\infty}\big(\lambda f(t)+g(t)\big)dt$.
   En conséquence si $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge et $\int_a^{+\infty} g(t)dt$ diverge alors $\int_a^{+\infty}\big(f(t)+g(t)\big)dt$ diverge.
2. **Positivité** : Soit $f\colon [a,+\infty[\to\mathbb{R}$ continue par morceaux, positive dont l'intégrale sur $[a,+\infty[$ converge. Alors $\int_a^{+\infty} f(t)dt\geq 0$.
   En conséquence si $f,g\colon [a,+\infty[\to \mathbb{R}$ continues par morceaux et telles que $\forall x\in[a,+\infty[$ $f(x)\leq g(x)$ alors

$$\int_a^{+\infty} f(t)dt \leq \int_a^{+\infty} g(t)dt.$$

Proposition 2.1.3. *Si $f\colon [a,+\infty[\to\mathbb{R}$ est positive et si $\int_a^{+\infty} f(t)dt=0$ alors f est identiquement nulle sur $[a,+\infty[$.*

2.2 Intégrabilité sur $[a,+\infty[$

2.2.1 Cas des fonctions positives

Proposition 2.2.1. *Soit $f\colon [a,+\infty[\to\mathbb{R}$ continue par morceaux. Si f est positive sur $[a,+\infty[$, on a l'équivalence entre*

1. *$\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge.*
2. *$(\exists M\in\mathbb{R}_+)$ $(\forall x\in[a,+\infty[)$, $\int_a^x f(t)dt\leq M$.*

Proposition 2.2.2. ***(Comparaison des fonctions positives)***
Soient $f,g\colon [a,+\infty[\to\mathbb{R}_+$ continues par morceaux telles qu'il existe $c\in[a,+\infty[$ vérifiant $\forall x\geq c$, $0\leq f(x)\leq g(x)$.

1. *Si $\int_a^{+\infty} g(t)dt$ converge alors $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge.*
2. *Si $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ diverge alors $\int_a^{+\infty} g(t)dt$ diverge*

2.2.2 Cas des fonctions de signe quelconque

Définition 2.2.1. (**Intégrabilité sur** $[a,+\infty[$)
Soit $f\colon [a,+\infty[\to\mathbb{K}$ ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) continue par morceaux. On dit que f est intégrable sur $[a,+\infty[$ si et seulement si l'intégrale $\int_a^{+\infty}|f(t)|dt$ converge. On dit aussi que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est absolument convergente.

Proposition 2.2.3. *Si f est intégrable sur $[a,+\infty[$ alors $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge et on a*

$$\left|\int_a^{+\infty} f(t)dt\right| \leq \int_a^{+\infty}|f(t)|dt$$

Conséquence 2.2.1. Pour f à valeurs réelles on a : f intégrable $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge.
Pour f à valeurs positives on a : f intégrable $\Leftrightarrow \int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge.

Remarque 2.1. Si $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge sans que $\int_a^{+\infty}|f(t)|dt$ converge, la première intégrale est dite *semi-convergente.*

Proposition 2.2.4. ***(Intégrabilité par comparaison asymptotique)***
Soit $f\colon [a,+\infty[\to \mathbb{R}$ et $g\colon [a,+\infty[\to \mathbb{R}_+$ continues par morceaux. Si $f(t) \overset{+\infty}{=} O\big(g(t)\big)$ et $\int_a^{+\infty} g(t)dt$ converge, alors f est intégrable sur $[a,+\infty[$.

Conséquence 2.2.2. Avec les mêmes hypothèses si $f(t) \overset{+\infty}{=} o\big(g(t)\big)$, on a les mêmes conclusions.
Si $f,g\colon [a,+\infty[\to \mathbb{R}$ sont continues par morceaux et $f(t) \overset{+\infty}{\sim} g(t)$ alors l'**intégrabilité** de g équivaut à celle de f.

Proposition 2.2.5. ***(Equivalence des fonctions à valeurs positives)***
Soient $f,g\colon [a,+\infty[\to \mathbb{R}_+$ continues par morceaux telles que $f(t) \overset{+\infty}{\sim} g(t)$ alors $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ et $\int_a^{+\infty} g(t)dt$ sont de même nature.

Proposition 2.2.6. ***(Intégrale de Riemann sur** $[a,+\infty[$**)***
Soit α un réel.

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} \text{ converge si et seulement si } \alpha > 1$$

Proposition 2.2.7. ***(Intégrabilité sur** $[a,+\infty[$ **et limite en** $+\infty$**)***
Soit $f\colon [a,+\infty[\to \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) continue par morceaux. Si $f(x)$ admet une limite $l \in \mathbb{K}$ lorsque x tend vers $+\infty$ et si cette limite est différente de 0 alors $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ diverge.

Remarque 2.2. La condition $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ **n'est pas** une condition nécessaire de convergence de $\int_a^{+\infty} f(t)dt$.

2.3 Extension à un intervalle quelconque

2.3.1 Intégration sur $[a,b[$ ou $]a,b]$

Définition 2.3.1. Soient $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f\colon [a,b[\to \mathbb{K}$ continue par morceaux. On dira que l'intégrale de f sur $[a,b[$ converge si et seulement si l'intégrale partielle $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ admet une limite finie lorsque x tend vers b^- (vers b par valeurs inférieures). On pose

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{x\to b^-} \int_a^x f(t)dt.$$

On parlera également dans ce cas du reste de l'intégrale convergente $y \mapsto \int_y^b f(t)dt$ qui tend vers 0 lorsque $y \to b^-$.

Définition 2.3.2. Soient $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f\colon]a,b] \to \mathbb{K}$ continue par morceaux. On dira que l'intégrale de f sur $]a,b]$ converge si et seulement si l'intégrale partielle $x \mapsto \int_x^b f(t)dt$ admet une limite finie lorsque x tend vers a^+ (vers a par valeurs supérieures). On pose

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{x\to a^+} \int_x^b f(t)dt.$$

On parlera également dans ce cas du reste de l'intégrale convergente $y \mapsto \int_a^y f(t)dt$ qui tend vers 0 lorsque $y \to a^+$.

Remarque 2.3. Dans le cas où f est continue par morceaux sur $[a,b]$, alors

$$\begin{aligned}\lim_{x\to b^-} \int_a^x f(t)dt &= \int_a^b f(t)dt \\ &= \lim_{x\to a^+} \int_x^b f(t)dt \end{aligned} \tag{2.2}$$

et l'intégrale est trivialement convergente.
Par extension si f est continue par morceaux sur $[a,b[$ (respectivement sur $]a,b]$) et prolongeable par continuité en b (respectivement en a), c'est à dire si f admet une limite finie l en b (respectivement en a) alors l'intégrale sur l'intervalle correspondant est convergente. Dans ce cas elle est dite «faussement impropre» en b (respectivement en a).

2.3.2 Intégration sur un intervalle ouvert

Définition 2.3.3. Soit $f\colon]a,b[\to \mathbb{K}$ continue par morceaux, $a \in \mathbb{R}\cup\{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$. On dit que l'intégrale de f sur $]a,b[$ converge si et seulement si, pour tout $c \in]a,b[$, les intégrales de f sur $]a,c]$ et sur $[c,b[$ convergent. Et on a alors

$$\int_{]a,b[} f = \int_{]a,c]} f + \int_{[c,b[} f.$$

La nature et la valeur de l'intégrale sur $]a,b[$ ne dépendant pas du point c médian choisi.

Remarque 2.4. On généralise aux intégrales convergentes sur $[a,b[$, sur $]a,b]$ ou sur $]a,b[$, les propriétés des intégrales convergentes sur $[a,+\infty]$ de positivité, croissance, relation de Chasles et de relation entre intégrale du conjugué et conjugué de l'intégrale dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

2.4 Intégrabilité sur un intervalle quelconque

On généralise à un intervalle quelconque $I \subset \mathbb{R}$ les propriétés vues au 2.2 pour l'intégrabilité sur $[a, +\infty[$.

2.4.1 Cas des fonctions positives

Proposition 2.4.1. *Si $f\colon I \to \mathbb{R}_+$ continue par morceaux on a l'équivalence entre*

1. *$\int_I f$ converge.*
2. *$(\exists M > 0)$ tel que pour tout segment $[\alpha, \beta] \subset I$ $\int_\alpha^\beta f(t)dt \leq M$.*

Proposition 2.4.2. *Soient $f, g\colon I \to \mathbb{R}_+$ continues par morceaux telles que $\forall x \in I$, $0 \leq f(x) \leq g(x)$.*

1. *Si $\int_I g(t)dt$ converge alors $\int_I f(t)dt$ converge.*
2. *Si $\int_I f(t)dt$ diverge alors $\int_I g(t)dt$ diverge*

2.4.2 Cas des fonctions de signe quelconque

Proposition 2.4.3. *On dit que f est intégrable sur I si et seulement si $\int_I |f|$ est convergente. Dans ce cas, comme au 2.2.2, $\int_I f$ converge et on a*

$$\left| \int_I f \right| \leq \int_I |f|$$

2.4.3 Opérations

1. Sur les fonctions :
   Si les fonction $f, g\colon I \to \mathbb{K}$ sont continues par morceaux, si $\lambda \in \mathbb{K}$ et si f et g sont intégrables sur I alors $\lambda f + g$ est intégrable sur I.

   Exercice 2.1. Montrer que dans les hypothèses de la proposition précédente on ne peut rien dire du *produit* de deux fonctions intégrables en trouvant deux fonctions intégrables dont le produit ne l'est pas.
   Montrer par contre que si f^2 et g^2 sont intégrables, alors le produit fg l'est.

2. Sur les intervalles :
   Si f est intégrable sur I alors f est intégrable sur tout intervalle $J \subset I$. En conséquence f est intégrable sur $]a, b[$ *si et seulement si* f est intégrable sur $]a, c]$ et sur $[c, b[$ pour tout $c \in]a, b[$.

2.4.4 Intégrabilité par comparaison

1. Domination :

   Proposition 2.4.4. *Soient $f\colon I \to \mathbb{K}$ et $\varphi\colon I \to \mathbb{R}_+$ continues par morceaux. Si $\forall t \in I$ $|f(t)| \leq \varphi(t)$ et si φ est intégrable sur I alors f est intégrable sur I.*

   Exemple 2.4.1. Si I est un intervalle borné et si $f\colon I \to \mathbb{K}$ est continue par morceaux et bornée alors f est intégrable sur I.

2. Comparaison asymptotique :

   Proposition 2.4.5. *(*On prend içi comme exemple le cas $I = [a, b[$. Les autres cas s'en déduisent aisément*)*
   Soient $f, g\colon [a, b[\to \mathbb{K}$ continues par morceaux, $a \in \mathbb{R}$. Si $f(t) \overset{b^-}{=} O\big(g(t)\big)$ et g intégrable sur $[a, b[$ alors f l'est également.

   Si $f(t) \overset{b^-}{=} o\big(g(t)\big)$ et g intégrable sur $[a, b[$ alors f l'est également.

   Si $f(t) \overset{b^-}{\sim} g(t)$ alors l'intégrabilité de f sur $[a, b[$ équivaut à celle de g.

   Si $f, g\colon [a, b[\to \mathbb{R}_+$ et si $f(t) \overset{b^-}{\sim} g(t)$ alors les intégrales $\int_{[a,b[} f$ et $\int_{[a,b[} g$ sont de même nature.

3. Intégrales de Riemann :

   Proposition 2.4.6. ***(Intégrales de Riemann)***
   Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$ et α un réel. L'intégrale

   $$\int_a^b \frac{dt}{(t-a)^\alpha}$$

   converge si et seulement si $\alpha < 1$.
   L'intégrale

   $$\int_a^b \frac{dt}{(b-t)^\alpha}$$

   converge si et seulement si $\alpha < 1$.

2.5 Calcul d'intégrales impropres

2.5.1 Utilisation des intégrales partielles

1. Sur $[a, b[$ (ou $]a, b]$) : on calcule $\int_a^x f(t)dt$ et on détermine $\lim_{x \to b^-} \int_a^x f(t)dt$ ou, si f est continue sur $[a, b[$, on détermine une primitive de f sur $[a, b[$, F et on calcule $[F(t)]_a^{b^-}$.
2. Sur $]a, b[$: on calcule $\int_x^y f(t)dt$ et on détermine $\lim_{y \to b^-} \int_x^y f(t)dt$ et $\lim_{x \to a^+} \int_x^y f(t)dt$ ou, si f est continue sur $]a, b[$, on détermine une primitive de f sur $[a, b[$, F et on calcule $[F(t)]_{a^+}^{b^-}$.

2.5.2 Changement de variables dans les intégrales impropres

Proposition 2.5.1. *Soit* $\varphi\colon]a,b[\to]\alpha,\beta[$ *une bijection de classe* $\mathcal{C}^1$ *croissante et* $f\colon]\alpha,\beta[\to\mathbb{K}$ *une application continue par morceaux. On a équivalence entre :*

1. $\int_\alpha^\beta f(u)du$ *converge.*
2. $\int_a^b f\big(\varphi(t)\big)\varphi(t)'dt$ *converge.*

avec égalité des deux intégrales.

Remarque 2.5.

1. Si φ est décroissante alors
$$\int_a^b f\big(\varphi(t)\big)\varphi(t)'dt = \int_\beta^\alpha f(u)du.$$
2. En remplaçant f par $|f|$ et comme φ' est de signe constant, on a : $t\mapsto f\big(\varphi(t)\big)\varphi(t)'$ est intégrable sur $]a,b[$ si et seulement si $u\mapsto f(u)$ l'est sur $]\alpha,\beta[$.

2.5.3 Intégration par parties dans les intégrales impropres

Proposition 2.5.2. *Soit* I *un intervalle de* $\mathbb{R}$ *d'extrémités* a *et* b, $a<b$, $a,b\in\overline{\mathbb{R}}$ *et* $u,v\colon I\to\mathbb{K}$ *de classe* $\mathcal{C}^1$. *Si le produit* uv *admet une limite finie en* a^+ *et* b^- *alors les intégrales* $\int_a^b\big(u'v\big)(t)dt$ *et* $\int_a^b\big(uv'\big)(t)dt$ *sont de même nature et en cas de convergence on a l'égalité :*

$$\int_a^b u'(t)v(t)dt = [u(t)v(t)]_{a^+}^{b^-} - \int_a^b u(t)v'(t)dt.$$