Exercice :

Existence et calcul de

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}} dt$$

solution :

La fonction $f \colon t \mapsto \frac{e^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}$est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$. Au voisinage de 0 elle est équivalente à une fonction Riemann-intégrable et au voisinage de $+\infty$, intégrable par comparaison avec n'importe quelle fonction $\frac{1}{t^\alpha}$ $(\alpha > 1)$. On pose $u = \sqrt{t}$, la fonction $t \mapsto \sqrt{t}$ est $\mathcal{C}^1$, bijective, croissante de $]0, +\infty[$ sur lui même, $dt = 2udu$ et

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} 2udu = 2 \int_0^{+\infty} e^{-u} du = 2.$$

Exercice :

Existence et calcul de

$$I = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$$

solution :

La fonction $f \colon t \mapsto t^n e^{-t}$ est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$ et au voisinage de $+\infty$ intégrable par comparasion asymptotique ($f(t) = o\big(\frac{1}{t^2}\big)$ par exemple). Comme $\lim_{t \to +\infty} t^n e^{-t} = 0$ (et qu'on a pas de problème en 0) et que les deux fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle d'intégration, on peut intégrer par partie :

$$\begin{aligned} u' &= e^{-t} & \qquad\qquad v &= t^n \\ u &= -e^{-t} & v' &= nt^{n-1} \end{aligned}$$

et

$$I = \left[-e^{-t} t^n \right]_0^{+\infty} + n \int_0^{+\infty} t^{n-1} e^{-t} dt$$

Ou encore $I_n = nI_{n-1}$. Comme $I_0 = 1$, on en déduit que $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt = n!$

Exercice :

Existence et calcul de

$$I = \int_0^1 \frac{\ln t}{(1+t)^2} dt$$

solution :

La fonction $f \colon t \mapsto \frac{\ln t}{(1+t)^2}$ est continue par morceaux sur $]0, 1]$ et équivalente en 0^+ à $\ln t$. Par équivalence de fonctions à signe constant, I converge. On pose

$$u' = \frac{1}{(1+t)^2} \qquad v = \ln t$$
$$u = -\frac{1}{1+t} \qquad v' = \frac{1}{t}$$

Ces deux fonctions sont bien $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1]$ **mais** $\lim_{t\to 0^+} u(t)v(t) = +\infty$.
Dans ces cas on a deux possibilités :

Intégrales partielles On fixe $x \in]0,1]$ et on intègre sur $[x,1]$ dans un premier temps :

$$\begin{aligned}
\int_x^1 \frac{\ln t}{(1+t)^2}dt &= \left[-\frac{\ln t}{1+t}\right]_x^1 + \int_x^1 \frac{dt}{t(1+t)} \\
&= \frac{\ln x}{1+x} + \big[\ln t - \ln(1+t)\big]_x^1 \\
&= \frac{\ln x}{1+x} - \ln x + \ln(x+1) - \ln 2 \\
&= \frac{-x\ln x}{1+x} + \ln(x+1) - \ln 2
\end{aligned}$$

La dernière ligne tendant vers $-\ln 2$ lorsque $x \to 0^+$. Finalement : $\int_0^1 \frac{\ln t}{(1+t)^2}dt = -\ln 2$.

Changement de primitive On pose $u(t) = \frac{t}{1+t} = 1 + \frac{-1}{1+t}$ et dans ce cas $\lim_{t\to 0^+} u(t)v(t) = \lim_{t\to 0^+} \frac{t\ln t}{1+t} = 0$ et directement :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{\ln t}{(1+t)^2}dt &= \left[\frac{t\ln t}{1+t}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{dt}{(1+t)} \\
&= -\big[\ln(1+t)\big]_0^1 \\
&= -\ln 2
\end{aligned}$$

<u>Exercice :</u>
Intégrabilité en 0^+ de

$$f\colon x \mapsto \int_1^x \frac{e^t}{t}dt$$

<u>solution :</u>
$g\colon t \mapsto \frac{e^t}{t}$ est définie et continue par morceaux (continue) sur $]0,1]$ et : pour tout $x \in]0,1]$:

$$f(x) = \int_1^x \frac{e^t - 1 + 1}{t}dt = \int_1^x \frac{e^t-1}{t}dt + \int_1^x \frac{dt}{t}$$

Ou encore

$$f(x) = \int_1^x \frac{e^t-1}{t}dt + \ln x$$

La fonction $h\colon t \mapsto \frac{e^t-1}{t}$ est prolongeable par continuité en 0^+ ($\lim_{t\to 0^+} \frac{e^t-1}{t} = 1$) ($\int_1^x h(t)dt$ est faussement impropre en 0^+) donc est intégrable sur $]0,1]$ et par définition de la convergence d'une intégrale $\int_1^x \frac{e^t-1}{t}dt$ admet une limite finie en 0^+ (la valeur de $\int_1^0 \frac{e^t-1}{t}dt$) et est intégrable au voisinage de 0^+. On sait que $x \mapsto \ln x$ l'est également. On en déduit que f (qui est bien sûr continue par morceaux sur $]0,1]$) est intégrable sur $]0,1]$.

Exercice : (il faut parfois passer par des intégrales impropres pour calculer des intégrales définies...)
Soit $a > -1$ un réel. En posant $x = \tan t$ montrer que

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1 + a\sin^2 t} = \frac{\pi}{2\sqrt{1+a}}$$

solution :
Par hypothèse ($a > -1$), la fonction $t \mapsto \frac{1}{1+a\sin^2 t}$ est définie et continue sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, la fonction $t \mapsto \tan t$ est de classe $\mathcal{C}^1$, bijective et croissante de $[0, \frac{\pi}{2}[$ sur $[0, +\infty[$ et donc $x = \tan t \Leftrightarrow t = \arctan x$, d'où $dt = \frac{dx}{1+x^2}$... qui ne donne rien. Mieux : $dx = \frac{dt}{\cos^2 t}$ qui permet :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\cos^2 t dx}{1 + a\sin^2 t} = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\frac{1+a\sin^2 t}{\cos^2 t}}$$

et en écrivant $1 = \cos^2 t + \sin^2 t$,

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1 + (1+a)x^2}$$

où on reconnaît une primitive usuelle : on pose $u = x\sqrt{1+a}$ (défini compte tenu des hypothèses) qui vérifie bien les hypothèses également du changement de variable dans les intégrales impropres et on obtient finalement

$$I = \frac{1}{\sqrt{1+a}}\left[\arctan(x\sqrt{1+a})\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2\sqrt{1+a}}.$$

Exercice :
Nature et calcul de

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{e^t+1}}$$

solution :
La fonction $f \colon t \mapsto \frac{1}{\sqrt{e^t+1}}$ est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$ et (facilement) intégrable par comparaison asymptotique au voisinage de l'infini ($f(t) \overset{+\infty}{\sim} e^{-\frac{t}{2}}$).
On pose $u = \sqrt{e^t+1}$ (la fonction $t \mapsto \sqrt{e^t+1}$) étant $\mathcal{C}^1$ bijective et croissante de $[0, +\infty[$ sur l'intervalle $[\sqrt{2}, +\infty[$.
Puis $du = \frac{e^t dt}{2\sqrt{e^t+1}} \Rightarrow dt = \frac{2u}{u^2-1}du$ et

$$I = \int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{2du}{u^2-1} = \left[\ln\left(\frac{u-1}{u+1}\right)\right]_{\sqrt{2}}^{+\infty} = \ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right) = 2\ln(\sqrt{2}+1)$$

Exercice : (RIEMANN aux deux extrémités)
Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Nature et calcul de

$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$$

(*Indication : on pourra utiliser (après l'avoir justifié !) le changement de variable* $x = t\frac{b-a}{2} + \frac{a+b}{2}$ soit le **sens inverse de d'habitude**)

solution :
La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$ est continue par morceaux sur $]a, b[$.
Au voisinage de a^+ :

$$f(x) = O\left(\frac{1}{\sqrt{x-a}}\right)$$

et est donc intégrable sur $]a, \frac{a+b}{2}]$.
Au voisinage de b^- :

$$f(x) = O\left(\frac{1}{\sqrt{b-x}}\right)$$

et est donc intégrable sur $[\frac{a+b}{2}, b[$.
La fonction f est intégrable sur $]a, b[$.
La fonction $t \mapsto t\frac{b-a}{2} + \frac{a+b}{2}$ est $\mathcal{C}^1$, bijective et croissante (affine !) de $]-1, 1[$ sur $]a, b[$.

$$x = t\frac{b-a}{2} + \frac{a+b}{2} \Leftrightarrow t = \frac{2}{b-a}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)$$

d'où $dx = \frac{b-a}{2}dt$, $x = a \to t = -1$, $x = b \to t = 1$,

$$x - a = \frac{b-a}{2}(1+t) \quad \text{et} \quad b - x = \frac{b-a}{2}(1-t)$$

et

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{\frac{b-a}{2}dt}{\frac{b-a}{2}\sqrt{1-t^2}} = [\arcsin t]_{-1}^{+1} = \pi.$$

Exercice :
On pose

$$I = \int_0^1 \frac{t-1}{\ln t}dt$$

1. Justifier l'existence de I.

2. Montrer que
$$I=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x}-e^{-2x}}{x}dx$$
3. En séparant cette dernière intégrale en deux, montrer que
$$I=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^{2\varepsilon}\frac{e^{-x}}{x}dx$$
4. En déduire la valeur de I.

solution :

1. La fonction $t\mapsto\frac{t-1}{\ln t}$ est continue par morceaux sur $]0,1[$.
   Au voisinage de 0^+ $f(t)\sim\frac{-1}{\ln t}\to 0^+$ et est donc intégrable (signe constant) sur $]0,\frac{1}{2}]$. Au voisinage de 1^-, $f(t)=\frac{t-1}{\ln(1+t-1)}\sim 1$ et est donc intégrable sur $[\frac{1}{2},1[$ (faussement impropres). La fonction f est intégrable sur $]0,1[$ et son intégrale converge.
2. on pose $t=e^{-x}\Leftrightarrow x=-\ln t$. La fonction $t\mapsto -\ln t$ est $\mathcal{C}^1$, bijective et **décroissante** de $]0,1]$ sur $[0,+\infty[$.
$$I=\int_{+\infty}^0\frac{e^{-x}-1}{-x}(-e^{-x})dx=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x}-e^{-2x}}{x}dx.$$
3. On serait tenté d'écire :
$$I=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x}}{x}dx-\int_0^{+\infty}\frac{e^{-2x}}{x}dx$$
   Mais ces deux intégrales divergent au voisinage de 0^+ !
   On évite le problème en considérant un réel $\varepsilon>0$ et en travaillant sur $[\varepsilon,+\infty[$ (aucun problème par contre en $+\infty$).
$$\begin{aligned}I_\varepsilon&=\int_\varepsilon^{+\infty}\left(\frac{e^{-x}}{x}-\frac{e^{-2x}}{x}\right)dx\\&=\int_\varepsilon^{+\infty}\frac{e^{-x}}{x}dx-\int_\varepsilon^{+\infty}\frac{e^{-2x}}{x}dx\\&=\int_\varepsilon^{+\infty}\frac{e^{-x}}{x}dx-\int_{2\varepsilon}^{+\infty}\frac{e^{-u}}{u}du\end{aligned}$$
   en posant dans la seconde intégrale, $u=2x$ (licite). Finalement
$$I=\lim_{\varepsilon\to 0}I_\varepsilon=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^{2\varepsilon}\frac{e^{-x}}{x}dx.$$
   (la variable d'intégration étant muette et par CHASLES).
4. La fonction $x\mapsto e^{-x}$ étant décroissante sur $[\varepsilon,2\varepsilon]$, on a les encadrements suivants pour tout $x\in[\varepsilon,2\varepsilon]$:
$$\begin{gathered}e^{-2\varepsilon}\le e^{-x}\le e^{-\varepsilon}\\ e^{-2\varepsilon}\int_\varepsilon^{2\varepsilon}\frac{dx}{x}\le\int_\varepsilon^{2\varepsilon}\frac{e^{-x}}{x}dx\le e^{-\varepsilon}\int_\varepsilon^{2\varepsilon}\frac{dx}{x}\\ e^{-2\varepsilon}\left[\ln t\right]_\varepsilon^{2\varepsilon}\le\int_\varepsilon^{2\varepsilon}\frac{e^{-x}}{x}dx\le e^{-\varepsilon}\left[\ln t\right]_\varepsilon^{2\varepsilon}\\ e^{-2\varepsilon}\ln 2\le\int_\varepsilon^{2\varepsilon}\frac{e^{-x}}{x}dx\le e^{-\varepsilon}\ln 2\end{gathered}$$
   Par encadrement, on en déduit que
$$I=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^{2\varepsilon}\frac{e^{-x}}{x}dx=\ln 2.$$

.

Exercice :

On pose

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n}$$

1. Justifier l'existence de I_n, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Déterminer une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1}.
3. En déduire la valeur de I_n ($\forall n \in \mathbb{N}^*$).

solution :

1. la fonction $f\colon x \mapsto \frac{1}{(1+x^2)^n}$ est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$ et au voisinage de $+\infty$: $f(x) \sim \frac{1}{x^{2n}}$, intégrable (selon RIEMANN) dès que $n \geq 1 \Leftrightarrow n \in \mathbb{N}^*$.
2. Intégration par partie :

$$u = \frac{1}{(1+x^2)^n} \qquad v' = 1$$

$$u' = \frac{-2nx}{(1+x^2)^{n+1}} \qquad v = x$$

Les fonctions étant toutes deux $\mathcal{C}^1$ et leur produit $u(x)v(x) = \frac{x}{(1+x^2)^n}$ tendant vers 0 lorsque $x \to +\infty$ pour $n \geq 1$.

$$\begin{aligned} I_n &= \left[\frac{x}{(1+x^2)^n}\right]_0^{+\infty} + 2n\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}}dx \\ &= 2n\int_0^{+\infty} \frac{x^2+1-1}{(1+x^2)^{n+1}}dx \\ &= 2n(I_n - I_{n+1}) \end{aligned}$$

La relation cherchée est $I_{n+1} = \frac{2n-1}{2n} I_n$

3. En « dépliant » cette relation :

$$I_n = \frac{2(n-1)-1}{2(n-1)} I_{n-1} = \frac{2n-3}{2n-2} I_{n-1} = \frac{(2n-3)(2n-5)}{(2n-2)(2n-4)} I_{n-2}$$

$$\vdots$$

$$I_n = \frac{(2n-3)(2n-5)\cdots 5\times 3}{(2n-2)(2n-4)\cdots 4\times 2} I_1$$

$$I_n = \frac{(2n-3)(2n-5)\cdots 5\times 3}{2^{n-1}(n-1)!} I_1$$

$$I_n = \frac{2^{n-1}(n-1)!(2n-3)(2n-5)\cdots 5\times 3}{(2^{n-1}(n-1)!)^2} I_1 = \frac{(2n-2)!}{(2^{n-1}(n-1)!)^2} I_1$$

La valeur de I_1 étant bien connue on en déduit :

$$I_n = \frac{(2n-2)!}{(2^{n-1}(n-1)!)^2} \frac{\pi}{2}$$

Exercice :

Existence et calcul de
$$I=\int_0^1 \frac{\ln(1-x^2)}{x^2}dx.$$

solution :

La fonction $f\colon x\mapsto \frac{\ln(1-x^2)}{x^2}$ est continue par morceaux sur $]0,1[$.
Au voisinage de 0^+ : $\frac{\ln(1-x^2)}{x^2}\sim\frac{-x^2}{x^2}=-1$ et l'intégrale est faussement impropre en 0.
Au voisinage de 1^- :
$$\frac{\ln(1-x^2)}{x^2}=\frac{\ln(1+x)+\ln(1-x)}{x^2}\sim \ln 2+\ln(1-x)\sim\ln(1-x).$$
Et $\sqrt{1-x}\ln(1-x)\to 0$ quand $(1-x)\to 0^+$ Donc $\ln(1-x)$ est intégrable par comparaison asymptotique au voisinage de 1^- (ou changement de variable $x=1-h$ avec $h\to 0^+$).
On pose
$$u'=\frac{1}{x^2}\qquad\qquad v=\ln(1-x^2)$$
$$u=\frac{-1}{x}\qquad\qquad v'=\frac{-2x}{1-x^2}$$
Les deux fonctions étant $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1[$ mais problème : $\lim_{x\to1^-}u(x)v(x)=+\infty$!
On choisit une autre primitive en posant $u=1+\frac{-1}{x}=\frac{(x-1)}{x}$ et
$$\begin{aligned}I&=\left[\frac{(x-1)\ln(1-x^2)}{x}\right]_0^1+\int_0^1\frac{(x-1)2x}{x(1-x^2)}dx\\&=-2\int_0^1\frac{dx}{1+x}=-2\ln 2\end{aligned}$$
Finalement :
$$I=\int_0^1\frac{\ln(1-x^2)}{x^2}dx=-2\ln 2$$

Exercice :

Soient $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$. Etudier l'intégrabilité sur $]0,+\infty[$ de la fonction
$$f\colon x\mapsto x^\alpha e^{-\beta x}$$

solution :

La fonction f est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$ si $\alpha\geq 0$ et sur $]0,+\infty[$ si $\alpha<0$.

1. Au voisinage de 0^+

   Si $\alpha < 0$ **:** $f(x) \sim \frac{1}{x^{-\alpha}}$ et est intégrable si et seulement si $-\alpha < 1 \Leftrightarrow \alpha > -1$ c'est à dire $\alpha \in]-1, 0[$.

   Si $\alpha \geq 0$ **:** f est intégrable sur $[0, 1]$ donc intégrable sur $]0, 1]$.

2. Au voisinage de $+\infty$:

   Si $\beta < 0$ **:** $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et la fonction n'est pas intégrable.

   Si $\beta = 0$ **:** $f(x) = \frac{1}{x^{-\alpha}}$ qui est intégrable sur $[1, +\infty[$ si et seulement si $-\alpha > 1 \Leftrightarrow \alpha < -1$.

   Si $\beta > 0$ **:** $f(x) \overset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ et est intégrable sur $[1, +\infty[$ pour toutes valeurs de α.

   En conclusion f est intégrable sur $]0, +\infty[$ si et seulement si $\beta > 0$ et $\alpha > -1$.

Exercice :

On pose

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^4+1} \quad \text{et} \quad J = \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{x^4+1} dx$$

1. Montrer que $I = J$.
2. Utiliser ce résultat pour calculer leur valeur commune à l'aide du changement de variable $x = e^t$. (*Indication : on pourra utiliser l'égalité :* $\operatorname{ch} 2t = 1 + 2\operatorname{sh}^2 t$)
3. A l'aide d'une intégration par partie (que l'on justifiera) en déduire la valeur de

$$H = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^4+1)^2}$$

solution :

1. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x^4+1}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$ et $f(x) \sim \frac{1}{x^4}$ au voisinage de $+\infty$ ce qui garantit l'existence de I.

   La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est $\mathcal{C}^1$ bijective et décroissante de l'intervalle $]0, +\infty[$ sur lui-même et $y = \frac{1}{x} \Leftrightarrow dy = -\frac{dx}{x^2} = -y^2 dx$. On a

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^4+1} = \int_{+\infty}^0 \frac{-\frac{dy}{y^2}}{1+\frac{1}{y^4}} = \int_0^{+\infty} \frac{y^2}{y^4+1} dy = J.$$

2. L'idée est d'ajouter I et J pour obtenir deux fois la valeur commune :

$$I + J = \int_0^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1} dx$$

   En suivant l'indication $x = e^t \Leftrightarrow t = \ln x$ on a $dx = e^t dt$, la fonction $x \mapsto \ln x$ étant une bijection croissante $\mathcal{C}^1$ de $]0, +\infty[$ sur $\mathbb{R}$ et :

$$\begin{aligned} I + J &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+e^{2t}}{1+e^{4t}} e^t dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2t} 2\operatorname{ch} t}{e^{2t} 2\operatorname{ch} 2t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{ch} t}{1 + 2\operatorname{sh}^2 t} dt \end{aligned}$$

La fonction $t \mapsto \operatorname{sh} t$ étant une bijection $\mathcal{C}^1$, croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$,

$$I + J = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{1+2u^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\arctan(\sqrt{2}u)\right]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

et finalement

$$I = J = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

3. En posant

$$u' = 1 \qquad v = \frac{1}{x^4+1}$$

$$u = x \qquad v' = \frac{-4x^3}{(x^4+1)^2}$$

et en vérifiant que u et v sont $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et que $\lim_{x\to+\infty} u(x)v(x) = 0$ on a :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^4+1} \\ &= \left[\frac{x}{x^4+1}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{4x^4}{(x^4+1)^2} dx \\ &= 4\int_0^{+\infty} \frac{x^4+1-1}{(x^4+1)^2} dx \\ &= 4I - 4\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^4+1)^2} \end{aligned}$$

D'où :

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^4+1)^2} = \frac{3I}{4} = \frac{3\pi}{8\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{16}\pi$$

Exercice :

Soit $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = x^2 \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) \quad \text{si } x \in]0,1] \quad \text{et } f(0) = 0.$$

Montrer que f est dérivable sur $[0,1]$ mais que sa dérivée n'est pas intégrable sur $]0,1]$.

solution :

f est dérivable sur $]0,1]$ et $\forall x \in]0,1]$

$$f'(x) = 2x\cos\frac{1}{x^2} - x^2\frac{2}{x^3}\left(-\sin\frac{1}{x^2}\right) = 2x\cos\left(\frac{1}{x^2}\right) + \frac{2}{x}\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

et puisque

$$\frac{f(x)-f(0)}{x} = x\cos\left(\frac{1}{x^2}\right) \to 0 \quad \text{quand } x \to 0$$

f est dérivable aussi en 0 et $f'(0) = 0$.

mais $g\colon x \mapsto \frac{2}{x}\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$ n'est pas intégrable sur $]0,1]$.

En effet la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est $\mathcal{C}^1$ bijective, décroissante de $]0,1]$ sur $[1,+\infty[$ et en posant $t = \frac{1}{x^2}$ soit $dt = \frac{-2dx}{x^3} \Leftrightarrow \frac{dx}{x} = -\frac{x^2dt}{2} = \frac{-dt}{2t}$ on a :

$$\int_0^1 \frac{\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)}{x}dx = \int_{+\infty}^1 -\sin t \times \frac{dt}{2t} = \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}dt$$

Par la proposition de changement de variable dans les intégrales impropres, ces deux intégrales sont de même nature (et donc convergentes !) mais ces deux fonctions ne sont ni l'une ni l'autre intégrables sur leurs intervalles respectifs.